

## ผลการเรียนรู้

เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

## สาระสำคัญ

## บทนิยาม 1

จำนวนเชิงซ้อน (Complex number) คือ คู่อันดับ  $(a, b)$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $(a, b)$  และ  $(c, d)$

## 1. การเท่ากัน

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

## 2. การบวก

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

## 3. การคูณ

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

## บทนิยาม 2

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $z = (a, b)$  หรือ  $z = a + bi$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

เรียก  $a$  ว่า ส่วนจริง (real part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Re}(z)$

เรียก  $b$  ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ  $z$  และเขียนแทนด้วย  $\text{Im}(z)$

## จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนได้

## สาระการเรียนรู้

การกำหนดสัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูป  $a + bi$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง ทำให้การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้ง่าย โดยใช้สมบัติต่างๆ เกี่ยวกับการบวกและการคูณเช่นเดียวกับสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริง โดยที่  $i^2 = -1$  เช่น

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (bi + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a + bi)(c + di) &= a(c + di) + bi(c + di) \\
 &= ac + adi + bci + bdi^2 \\
 &= (ac - bd) + (ad + bc)i
 \end{aligned}$$

### กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องการบวก ลบ คูณ และหารจำนวนเชิงซ้อน โดยตั้งคำถามนักเรียน ดังนี้

- การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน มีนิยามว่าอย่างไรและมีวิธีหาอย่างไร
- ให้นักเรียนยกตัวอย่างการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน
- นักเรียนและครูสรุปนิยาม การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

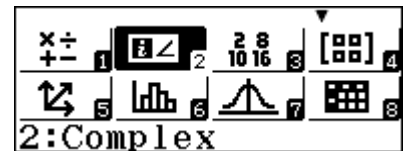
ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\
 (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i \\
 (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i
 \end{aligned}$$

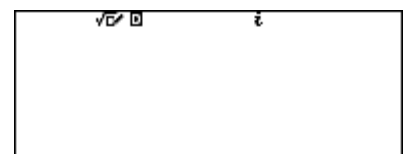
2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

3. เตรียมการให้ความรู้ในการใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อเรียนรู้เรื่องสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน โดยให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม จำนวน 5 กลุ่ม โดยทุกคนเตรียมเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้ในการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อน และหาค่าอื่นๆ ในจำนวนเชิงซ้อน โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

3.1 กดปุ่ม **MENU**

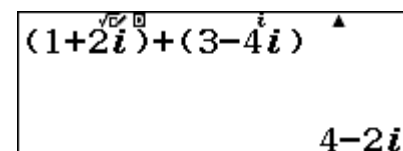


3.2 กดปุ่ม **2** เพื่อเลือกเมนู Complex



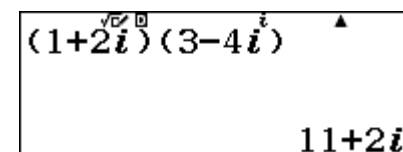
3.3 หาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน  $(1 + 2i) + (3 - 4i)$

โดยกดปุ่ม **( 1 + 2 ENG ) + ( 3 - 4 ENG ) =**



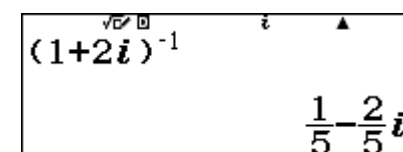
3.4 หาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน  $(1 + 2i)(3 - 4i)$

โดยกดปุ่ม **( 1 + 2 ENG ) ( 3 - 4 ENG ) =**



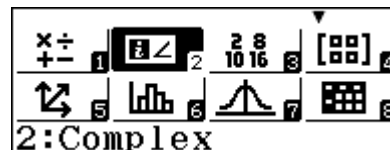
3.5 หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน  $(1 + 2i)$

โดยกดปุ่ม **( 1 + 2 ENG ) x<sup>-1</sup> =**

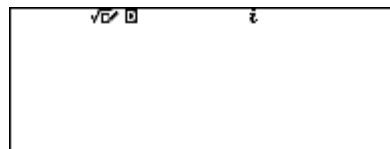


4. นักเรียนแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เพื่อใช้ในการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อน และหาค่าอื่นๆ ในจำนวนเชิงซ้อน โดยการใช้การแทนค่าด้วยตัวแปร โดยครูแนะนำวิธีการใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.1 กดปุ่ม **MENU**

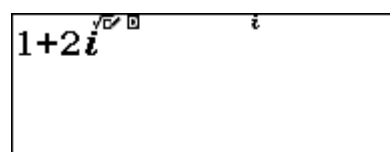


4.2 กดปุ่ม **2**



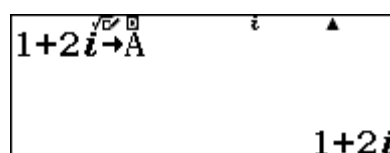
4.3 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน  $1 + 2i$

โดยกดปุ่ม **1** **+** **2** **ENG**



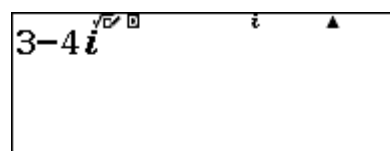
4.4 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน  $A = 1 + 2i$

โดยกดปุ่ม **STO** **(←)**



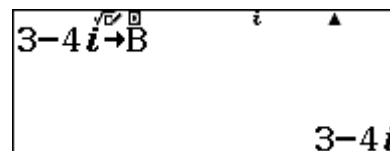
4.5 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน  $3 - 4i$

โดยกดปุ่ม **3** **-** **4** **ENG**



4.6 แทนค่าจำนวนเชิงซ้อน  $B = 3 - 4i$

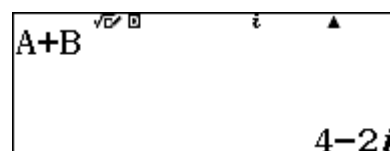
โดยกดปุ่ม **STO** **☺**



4.7 นำค่าจำนวนเชิงซ้อน  $A = 1 + 2i$  มาบวกกับ

จำนวนเชิงซ้อน  $B = 3 - 4i$  โดยกดปุ่ม

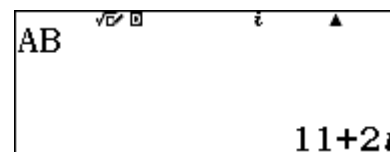
**ALPHA** **(←)** **+** **ALPHA** **☺** **=**



4.8 นำค่าจำนวนเชิงซ้อน  $A = 1 + 2i$  มาคูณกับ

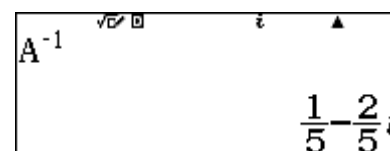
จำนวนเชิงซ้อน  $B = 3 - 4i$  โดยกดปุ่ม

**ALPHA** **(←)** **ALPHA** **☺** **=**



4.9 หาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน  $A = 1 + 2i$

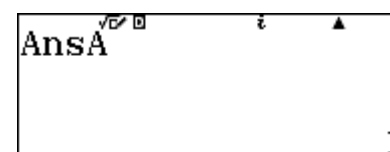
โดยกดปุ่ม **ALPHA** **(←)** **x<sup>-1</sup>** **=**



4.10 หาผลคูณของ  $A^{-1}A$  โดยใช้คำตอบจากข้อที่แล้ว


กดปุ่ม **Ans** **ALPHA** **(←)** **=**

(ปุ่ม **Ans** จะเรียกค่าคำตอบ ที่หาเป็นลำดับสุดท้ายเสมอ)



4.11 ป้อนจำนวนเชิงซ้อน  $5 + 5i$  และแทนด้วยค่า  $C = 5 + 5i$

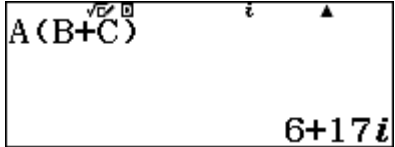
โดยกดปุ่ม **5** **+** **5** **ENG** **STO**  **$\alpha^1$**



5+5i→C  
5+5i

4.12 หาค่า  $A(B + C)$

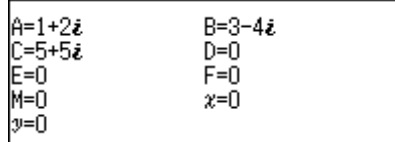
โดยกดปุ่ม **ALPHA** **(→)** **(←)** **ALPHA** **□□□**  
**+** **ALPHA**  **$\alpha^1$**  **)** **=**



A(B+C)  
6+17i

4.13 ดูค่าที่เก็บไว้ในตัวแปรทั้งหมด

โดยกดปุ่ม **SHIFT** **STO**



A=1+2i	B=3-4i
C=5+5i	D=0
E=0	F=0
M=0	x=0
y=0	

5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเก็บค่าตัวแปร D, E, F, M, x และ y ด้วยจำนวนเชิงซ้อนอะไรก็ได้ แล้วตรวจสอบค่าตัวแปรทั้งหมดอีกครั้งหนึ่ง

6. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มหาค่า  $D+E$ ,  $E+F$ ,  $F+M$ ,  $x+y$  แล้วให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันว่าค่าที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่ (เป็นจำนวนเชิงซ้อนเสมอ) แล้วให้นักเรียนลองหาค่าจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่ผลบวกไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้หรือไม่ (ไม่มี)

7. ครูแจกใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำและร่วมกันอภิปราย (ขั้นสำรวจ)

8. นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอใบกิจกรรมที่ได้รับและอภิปรายผลเพื่อนำไปสู่การตรวจสอบสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน (ขั้นหาความสัมพันธ์)

9. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติปิดการบวกของจำนวนเชิงซ้อน)

10. ครูให้นักเรียนหาค่า  $DXE$ ,  $EXF$ ,  $FXM$ ,  $xy$  แล้วให้นักเรียนอภิปรายร่วมกันว่าค่าที่ได้เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่ (เป็นจำนวนเชิงซ้อนเสมอ) แล้วให้นักเรียนลองหาค่าจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่ผลคูณไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้หรือไม่ (ไม่มี)

11. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติปิดการคูณของจำนวนเชิงซ้อน)

12. ครูให้นักเรียนหาค่า  $D+0$ ,  $E+0$ ,  $F+0$ ,  $M+0$ ,  $x+0$  และ  $y+0$  แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับค่าเดิมเสมอ)

13. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นเอกลักษณ์การบวก (ซึ่งจะได้ว่า 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก)

14. ครูให้นักเรียนหาค่า  $DX1$ ,  $EX1$ ,  $FX1$ ,  $MX1$ ,  $x \times 1$  และ  $y \times 1$  แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับค่าเดิมเสมอ)

15. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นเอกลักษณ์การคูณ (ซึ่งจะได้ว่า 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ)

16. ครูให้นักเรียนหาค่า  $(-D)+D$ ,  $(-E)+E$ ,  $(-F)+F$ ,  $(-M)+M$ ,  $(-x)+x$  และ  $(-y)+y$  แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับ 0 ซึ่งเป็นเอกลักษณ์การบวกเสมอ)

17. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นตัวผกผันการบวกของ  $Z$  (ซึ่งจะได้ว่า  $-Z$  เป็นตัวผกผันการบวกของ  $Z$  เสมอ) และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทดลองหาจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่มีตัวผกผันการบวกว่ามีหรือไม่ (ไม่มี เพราะสามารถหาตัวผกผันการบวกได้ทุกจำนวน)

18. ครูให้นักเรียนหาค่า  $(D^{-1})D$ ,  $(E^{-1})E$ ,  $(F^{-1})F$ ,  $(M^{-1})M$ ,  $(x^{-1})x$  และ  $(y^{-1})y$  แล้วให้นักเรียนอภิปรายถึงผลลัพธ์ที่ได้เป็นอย่างไร (ได้เท่ากับ 1 ซึ่งเป็นเอกลักษณ์การคูณเสมอ)

19. ครูซักถามนักเรียนแต่ละกลุ่มว่าสมบัตินี้เราเรียกว่าสมบัติอะไรในจำนวนเชิงซ้อน (สมบัติการมีตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน) และจำนวนเชิงซ้อนใดที่เป็นตัวผกผันการคูณของ  $Z$  (ซึ่งจะได้ว่า  $Z^{-1}$  เป็นตัวผกผันการบวกของ  $Z$  เสมอ) และให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทดลองหาจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่มีตัวผกผันการคูณว่ามีหรือไม่ (มี คือ 0 ดังนั้นจึงมีข้อยกเว้นสำหรับ 0)

20. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปสมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อนที่ได้จากการสำรวจ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์) จะได้ว่า

ถ้าให้  $Z, Z_1, Z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	$Z_1 + Z_2 \in \mathbf{C}$	$Z_1 Z_2 \in \mathbf{C}$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	$Z + 0 = Z = 0 + Z$	$Z \cdot 1 = Z = 1 \cdot Z$
สมบัติการมีตัวผกผัน	$Z + (-Z) = 0 = (-Z) + Z$	$ZZ^{-1} = 1 = Z^{-1}Z$

ถ้าให้  $Z, Z_1, Z_2$  และ  $Z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติการสลับที่	$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$	$Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$	$(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$
สมบัติการแจกแจง	$Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$	

ถ้า  $Z, Z_1, Z_2$  และ  $Z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	$Z_1 + Z_2 \in \mathbf{C}$	$Z_1 Z_2 \in \mathbf{C}$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	$Z + 0 = Z = 0 + Z$	$Z \cdot 1 = Z = 1 \cdot Z$
สมบัติการมีตัวผกผัน	$Z + (-Z) = 0 = (-Z) + Z$	$ZZ^{-1} = 1 = Z^{-1}Z$
สมบัติการสลับที่	$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$	$Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$	$(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$
สมบัติการแจกแจง	$Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$	

21. ครูและนักเรียนช่วยกันพิสูจน์สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนตามหลักการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันสมบัติต่างๆ ว่าเป็นจริงทุกกรณี อีกครั้งหนึ่ง

22. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz

### สื่อการเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน
3. แบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

### การวัดและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 1
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 1
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 1		หน้าที่ 1/2
เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถบอกสมบัติการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียน ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
ข้อ	กรณีที่ 1	กรณีที่ 2
1	$(1 + 2i) + (3 + 4i) =$	$(3 + 4i) + (1 + 2i) =$
2	$(-5i) + (3 + 4i) =$	$(3 + 4i) + (-5i) =$
3	$7 + (3 + 4i) =$	$(3 + 4i) + 7 =$
4	$(-5 - 6i) + (1 + 2i) =$	$(1 + 2i) + (-5 - 6i) =$
5	$(1.5 + 3.4i) + (2.9 - 0.5i) =$	$(2.9 - 0.5i) + (1.5 + 3.4i) =$
<p>จาก ข้อ 1 – 5 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า <math>a, b, c, d</math> เป็นจำนวนจริง และ <math>Z_1, Z_2</math> เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ <math>(a + bi) + (c + di) = (\dots + \dots i) + (\dots + \dots i)</math></p> <p>ดังนั้น <math>Z_1 + Z_2 = \dots + \dots</math></p> <p>เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า .....</p>		
6	$(1 + 2i)(3 + 4i) =$	$(3 + 4i)(1 + 2i) =$
7	$(-5i)(3 + 4i) =$	$(3 + 4i)(-5i) =$
8	$(7)(3 + 4i) =$	$(3 + 4i)(7) =$
9	$(-5 - 6i)(1 + 2i) =$	$(1 + 2i)(-5 - 6i) =$
10	$(1.5 + 3.4i)(2.9 - 0.5i) =$	$(2.9 - 0.5i)(1.5 + 3.4i) =$
<p>จาก ข้อ 6–10 กรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 พบว่า ถ้า <math>a, b, c, d</math> เป็นจำนวนจริง และ <math>Z_1, Z_2</math> เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ <math>(a + bi)(c + di) = (\dots + \dots i) (\dots + \dots i)</math></p> <p>ดังนั้น <math>Z_1 Z_2 = \dots</math></p> <p>เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า .....</p>		
11	$((1 + 2i) + (3 + 4i)) + (-5 - 6i) =$	$(1 + 2i) + ((3 + 4i) + (-5 - 6i)) =$
12	$((1 + 2i) + (-5i)) + (1.5 + 3.4i) =$	$(1 + 2i) + ((-5i) + (1.5 + 3.4i)) =$
13	$((1.5 + 3.4i) + (3 + 4i)) + (2.9 - 0.5i)$ $=$	$(1.5 + 3.4i) + ((3 + 4i) + (2.9 - 0.5i))$ $=$
14	$((5 + 3i) + (3 + 4i)) + (6 - 5i) =$	$(5 + 3i) + ((3 + 4i) + (6 - 5i)) =$
15	$((-4 - 8i) + (1 + 2i)) + (-9 + 3i) =$	$(-4 - 8i) + ((1 + 2i) + (-9 + 3i)) =$
<p>จากข้อ 11–15 กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พบว่า ถ้า <math>a, b, c, d, e, f</math> เป็นจำนวนจริง และ <math>Z_1, Z_2, Z_3</math> เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ว่า <math>((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) = (\dots + \dots i) + ((\dots + \dots i) + (\dots + \dots i))</math></p> <p>ดังนั้น <math>(Z_1 + Z_2) + Z_3 = \dots</math></p> <p>เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า .....</p>		

ใบกิจกรรมที่ 1.1		หน้าที่ 2/2
เรื่อง สมบัติการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน		
จุดประสงค์ สามารถบอกสมบัติการบวก การคูณจำนวนเชิงซ้อนได้		
คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz คำนวณค่าต่อไปนี้		
16	$((1 + 2i)(3 + 4i))(-5 - 6i) =$	$(1 + 2i)((3 + 4i)(-5 - 6i)) =$
17	$((1 + 2i)(-5i))(1.5 + 3.4i) =$	$(1 + 2i)((-5i)(1.5 + 3.4i)) =$
18	$((1.5 + 3.4i)(3 + 4i))(2.9 - 0.5i)$ $=$	$(1.5 + 3.4i)((3 + 4i)(2.9 - 0.5i))$ $=$
19	$((5 + 3i)(3 + 4i))(6 - 5i) =$	$(5 + 3i)((3 + 4i)(6 - 5i)) =$
20	$((-4 - 8i)(1 + 2i))(-9 + 3i) =$	$(-4 - 8i)((1 + 2i)(-9 + 3i)) =$
<p>จากข้อ 16-20 กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พบว่า ถ้า <math>a, b, c, d, e, f</math> เป็นจำนวนจริง และ <math>Z_1, Z_2, Z_3</math> เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>จะได้ว่า <math>((a + bi)(c + di))(e + fi) = (... + ... i)((... + ... i)(... + ... i))</math></p> <p>ดังนั้น <math>(Z_1 Z_2) Z_3 = .....</math></p> <p>เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า .....</p>		
21	$(1 + 2i)((3 + 4i) + (-5 - 6i)) =$	$(1 + 2i)(3 + 4i) + (1 + 2i)(-5 - 6i) =$
22	$(1 + 2i)((-5i) + (1.5 + 3.4i)) =$	$(1 + 2i)(-5i) + (1 + 2i)(1.5 + 3.4i) =$
23	$(-2 + 5i)((1 - 4i) + (1.5 + 3.4i))$ $=$	$(-2 + 5i)(1 - 4i) + (-2 + 5i)(1.5 + 3.4i)$ $=$
24	$(3 + 6i)((1 - 4i) + (-5 + 3i))$ $=$	$(3 + 6i)(1 - 4i) + (3 + 6i)(-5 + 3i)$ $=$
25	$(1.5 + 3.4i)((3 + 4i) + (2.9 - 0.5i))$ $=$	$(1.5 + 3.4i)(3 + 4i) + (1.5 + 3.4i)(2.9 - 0.5i)$ $=$
<p>จาก ข้อ 21-25 กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 พบว่า ถ้า <math>a, b, c, d, e, f</math> เป็นจำนวนจริง และ <math>Z_1, Z_2, Z_3</math> เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า</p> <p><math>(a + bi)((c + di) + (e + fi)) = (... + ... i)(... + ... i) + (... + ... i)(... + ... i)</math></p> <p>ดังนั้น <math>Z_1(Z_2 + Z_3) = .....</math></p> <p>เราเรียกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนข้อนี้ว่า .....</p>		



## แบบฝึกทักษะที่ 1

### เรื่องสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

**คำชี้แจง** ถ้า  $Z$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  และ  $Z_3$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน ให้นักเรียนบอกสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์

1.  $0 + Z = Z$  .....

2.  $Z \cdot 1 = Z$  .....

3.  $Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$  .....

4.  $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$  .....

5.  $Z_1 + Z_2 \in \mathbb{C}$  .....

6.  $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$  .....

7.  $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$  .....

8.  $ZZ^{-1} = 1$  .....

9.  $Z + (-Z) = 0$  .....

10.  $Z_1 Z_2 \in \mathbb{C}$  .....

11.  $Z^{-1} Z = 1$  .....

12.  $1 \cdot Z = Z$  .....

13.  $(-Z) + Z = 0$  .....

14.  $Z + 0 = Z$  .....

15.  $(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$  .....